УДК 330.356.7.002.6

Янковий В. О.,
к.е.н., доц. кафедри економіки і управління національним господарством, Одеський національний економічний університет, м. Одеса

ЕКОНОМІЧНІ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА І CES-ФУНКЦІЇ

Анотація. *Досліджується можливість оптимізації випуску продукції в рамках виробничої функції Кобба-Дугласа і функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів. Визначається оптимальна фондоозброєність, що забезпечує максимізацію випуску продукції. Показується, що в цьому випадку гранична норма заміщення ресурсів дорівнює одиниці. Пропонується нове тлумачення граничної норми заміщення ресурсів як індикатора диспропорцій при вкладенні коштів в агреговані фактори "капітал" і "праця". Визначаються зони беззбиткового інвестування у виробництво за умови, що капіталовкладення у виробничі фонди і робочу силу здійснюються в пропорції, що відповідає оптимальній фондоозброєності. Виведені на основі оптимальної фондоозброєності гранична норма заміщення ресурсів, а також зони беззбиткового інвестування можуть служити важливими додатковими характеристиками при застосуванні виробничих функцій у процесі аналізу випуску продукції на підприємствах України.*

Ключові слова: оптимізація, фондоозброєність, виробнича функція, беззбитковість, інвестування, заміщення ресурсів.

Iankovyi V. O.,
Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Economics and Management of National Economy, Odessa National Economic University, Odessa

ECONOMIC ASPECTS OF MATHEMATICAL ANALYSIS OF COBB-DOUGLAS PRODUCTION FUNCTION AND CES-FUNCTION

Abstract. *The possibility of optimization of the output within the Cobb-Douglas production function and the function with constant elasticity of the substitution of the resources is researched. The optimal capital-labor ratio providing maximization of the output is determined. It is shown that in this case the marginal rate of the substitution of the resources is equal to one. A new interpretation of the marginal rate of the substitution of the resources as an indicator of the disparities by investing funds in the aggregate factors "capital" and "labor" is offered. The zones of the breakeven investment into the production provided that the investments into the production funds and labor force implement in proportions corresponding optimal capital-labor ratio are determined. The marginal rate of the substitution of the resources and the breakeven investment zones derived based on the capital-labor ratio can be important additional features by using the production functions in the analysis of the output of the enterprises of Ukraine.*

Keywords: optimization, capital-labor ratio, production function, breakeven, investment, the substitution of the resources.

Постановка проблеми. Питання оптимізації виробництва, раціонального використання наявних ресурсів, зокрема виробничих фондів ($\boldsymbol{K}$) і робочої сили ($\boldsymbol{L}$), завжди постають перед менеджерами будь-якого суб'єкта господарювання (підприємства, регіону, галузі, народного господарства в цілому). Зазвичай дана проблема розглядається в декількох головних аспектах у залежності від обраного критерію оптимізації. З цієї точки зору задача в самому загальному вигляді може бути сформульована наступним чином:

1) знайти такий рівень фактичної фондоозброєності, який забезпечує максимум валового прибутку суб'єкта господарювання;

2) знайти такий рівень фактичної фондоозброєності, який забезпечує максимум випуску продукції суб'єкта господарювання.

На нашу думку, дані варіанти поставленої задачі можуть бути досить успішно вирішені за допомогою двохфакторних виробничих функцій (ВФ):

$$\boldsymbol{Q = f(K; L)}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{Q}$ – випуск продукції (робіт, послуг) суб'єктом господарювання за певний період часу (зазвичай за рік).

ВФ є важливим елементом побудови та використання сучасних економетричних моделей на всіх рівнях управління, починаючи з робочого місця, агрегату, автоматизованої лінії (внутрішньовиробничий рівень), підприємства (мікрорівень), групи підприємств (галузевий та регіональний рівні) і закінчуючи народним господарством країни в цілому (макрорівень).

З цього приводу Г.Б. Клейнер зазначає: "Відображаючи в стислій формі один із головних економічних процесів – процес виробництва продукції, виробничі функції служать корисним інструментом, дозволяють проводити різноманітні аналітичні розрахунки, визначати ефективність використання ресурсів і доцільність їх додаткового залучення у виробництво, прогнозувати випуск продукції і контролювати реальність планових проектів" [1, с. 3].

Слід відзначити, що певні напрацювання в області застосування ВФ для вирішення першого варіанта сформульованої задачі оптимізації можна знайти в сучасній економіко-математичній літературі (див. роботи [2, с. 66-69, 74-75; 3]). Щодо другого варіанта – знаходження рівня фактичної фондоозброєності, який максимізує випуск продукції, – то йому приділялось дуже мало уваги, оскільки в якості основної мети господарювання у ринковій економіці частіше за все розглядалося отримання прибутку.

Між тим, в умовах жорсткої конкурентної боротьби у всіх галузях світового народного господарства, загострення проблеми підвищення конкурентоздатності вітчизняних товаровиробників у зв'язку з намаганням України вступити до ЄС даний аспект оптимізації представляється вельми актуальним і злободенним. Адже боротьба за ринки збуту неможлива без нарощування випуску високоякісної продукції з мінімальними витратами виробничих фондів і робочої сили.

Окрім того, розв'язання даної задачі, на наш погляд, дозволить вирішити ще одну важливу проблему фінансової діяльності суб'єктів господарювання – оцінку зон беззбиткового інвестування, що врешті-решт забезпечить підвищення ефективності роботи українських підприємств і галузей товарного виробництва.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Зазначимо, що в роботах Є.В. Черевко [4, с. 388-390; 6], В.О. Янкового [5; 7] виведена формула оптимальної фондоозброєності в умовах, коли виробництво продукції адекватно описується ВФ Кобба-Дугласа, Кобба-Дугласа-Тінбергена. Вона визначається наступним співвідношенням:

$$\frac{K}{L} = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{2}$$

де величини $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ вимірюються у вартісному вираженні; $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ – коефіцієнти еластичності випуску продукції за виробничими фондами і витратами праці відповідно.

При цьому максимум продукції в грошовому вираженні (**max*Q***) дорівнює

$$\max Q = \frac{A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}(K+L)^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{A}$ – коефіцієнт масштабу ВФ Кобба-Дугласа ($0 < \boldsymbol{A}$).

Окрім того, у цих же роботах було показано, що в умовах інвестування деякого додаткового капіталу $\boldsymbol{C_1} = \boldsymbol{K_1} + \boldsymbol{L_1}$ у виробництво в співвідношенні (2) зони беззбитковості визначаються наступною нерівністю:

$$A \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\beta} \cdot C_1^{\alpha+\beta-1} \geq \mathbf{1}. \tag{4}$$

При цьому в залежності від ступеня однорідності ВФ Кобба-Дугласа можливі три випадки.

1. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} > 1$. У такій ситуації говорять про позитивний ефект розширення масштабів виробництва. При цьому розмір інвестиції, яка забезпечить прибутковість додаткового виробництва, буде обмежений знизу. З нерівності (4) випливає, що інвестиція буде беззбитковою при

$$C_1 \geq \left[\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{A\cdot\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}. \tag{5}$$

2. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} < 1$. У цьому випадку говорять про негативний ефект розширення масштабів виробництва, а розмір інвестиції, яка забезпечить його беззбитковість, в такій ситуації буде обмежений зверху:

$$C_1 \leq \left[\frac{A\cdot\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}\right]^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}. \tag{6}$$

3. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 1$ (при лінійній однорідності ВФ Кобба-Дугласа) спостерігається нульовий ефект розширення масштабів виробництва, тобто прибутковість нового виробництва не залежить від розміру авансованого додаткового капіталу $\boldsymbol{C_1}$, а визначається певним співвідношенням коефіцієнтів побудованої функції:

$$1 \leq A\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}. \tag{7}$$

Постановка завдання. Мета статті полягає у визначенні параметрів ВФ, зокрема граничної норми заміщення ресурсів, які випливають із умов оптимальної фондоозброєності, що максимізує випуск продукції суб'єктів господарювання, а також дослідження цих умов і зон беззбитковості для функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів (*CES*-функції – від англ. абревіатури *Constant Elasticity of Substitution*).

Виклад основного матеріалу дослідження. Легко показати, що в умовах оптимальної фондоозброєності (2), (3) величина граничної норми заміщення ресурсів для ВФ Кобба-Дугласа дорівнює одиниці [8; 9]. Дійсно

$$h = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{K}{L} = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta} = 1. \tag{8}$$

Це означає, що одна додаткова грошова одиниця (100, 1000, 10000 … грн.), спрямована у виробничий капітал, буде забезпечувати зменшення витрат праці на точно таку ж грошову одиницю при умові незмінності випуску продукції. Натомість невиконання співвідношення $\boldsymbol{h} = 1$, яке випливає з формули (8), можна розглядати як сигнал про порушення оптимальної фондоозброєності, тобто про певні диспропорції при інвестуванні коштів у агреговані виробничі фактори “капітал” і “праця”.

Так, якщо $h > 1$, то це буде свідчити про те, що фактична фондоозброєність перевищує оптимальну. В цьому випадку можна говорити про надмірні витрати капіталу, що спрямований у виробничі фонди, в порівнянні з коштами на оплату праці. Тобто суб’єкту господарювання, наприклад підприємству, слід скоротити основні виробничі фонди, витрати на сировину, матеріали тощо або підвищити фонд оплати праці за рахунок залучення додаткових працівників, посилення їх матеріального стимулювання. Ясно, що в ситуації $h < 1$ управлінські рекомендації дзеркально протилежні: підприємству потрібно нарощувати фондоозброєність живої праці.

Розглянемо *CES*-функцію, яка завдяки границям зміни своїх коефіцієнтів задовольняє неокласичним умовам:

$$Q = A_0[A_1K^{-\rho} + (1-A_1)L^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}}, \quad K \times L \neq 0, \tag{9}$$

де A_0 – коефіцієнт шкали ($0 < A_0$); A_1 – коефіцієнт ваги виробничого фактора

($0 < A_1 < 1$); p – невідомий параметр ВФ ($-1 \le p$); γ – показник ступеня однорідності ВФ ($0 < \gamma$).

Коефіцієнти *CES*-функції підлягають оцінюванню за відомими значеннями показників Q, K, L, взятими з бухгалтерської та фінансової звітності досліджуваних суб’єктів господарювання. Слід мати на увазі, що вираження (9) принципово неможливо привести до лінійного вигляду і, отже, використати звичайні методи оцінки невідомих коефіцієнтів. Тому в даному випадку застосовують методи приблизного ітеративного оцінювання, зокрема нелінійний метод найменших квадратів.

На нашу думку, найбільш конструктивним представляється підхід до апроксимації *CES*-функції, запропонований Дж. Кментою. Він базується на логарифмуванні (9) і розкладанні результату в ряд Тейлора з подальшим застосуванням до отриманої наближеної моделі кореляційно-регресійного аналізу [10].

М. Кубініва та ін., використовуючи підхід Кменти в якості методу знаходження первісної оцінки параметрів *CES*-функції, розробили процедуру пошуку рішення поставленого завдання із заданою точністю на базі використання ітеративного алгоритму мінімізації цільової функції залишків моделі за методом Марквардта. Вказана процедура знайшла своє втілення в програмі MACRO6, написаній на мові Бейсік [11, с. 137-149], яка досить легко адаптується до сучасного програмного забезпечення за допомогою макросів редактора Excel.

Еластичність заміщення ресурсів σ для *CES*-функції знаходиться за формулою:

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}. \tag{10}$$

Відомо, що *CES*-функція в залежності від значення параметра p узагальнює інші ВФ:

1) при $p = -1$ отримаємо лінійну функцію (еластичність заміщення ресурсів $\sigma = \infty$);

2) при $p \to 0$ вираження (9) перетворюється у ВФ Кобба-Дугласа (еластичність заміщення ресурсів $\sigma = 1$);

3) при $p \to \infty$ отримаємо функцію Леонт’єва (еластичність заміщення ресурсів $\sigma = 0$).

Застосовуючи підхід, викладений у роботах [4-6], виведемо формулу оптимальної фондоозброєності в умовах, коли виробництво продукції адекватно описується *CES*-функцією. При цьому загальну суму капіталу, вкладеного у виробництво продукції, позначимо через C ($C = K + L$).

Для вирішення поставленого завдання знайдемо L з рівняння зв’язку $L = C - K$ і підставимо у вираження (9). Будемо шукати максимум *CES*-функції:

$$Q = A_0[A_1K^{-\rho} + (1-A_1)(C-K)^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}} \to \max. \tag{11}$$

Знайдемо критичні точки вираження (11), в яких перша похідна Q' по K дорівнює 0 або ∞:

$$\begin{aligned} Q' &= -\frac{\gamma}{\rho}A_0[A_1K^{-\rho} + (1-A_1)(C-K)^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}-1} \times \\ &\times[-\rho A_1K^{-\rho-1} + \rho(1-A_1)(C-K)^{-\rho-1}] = \\ &= \gamma A_0[A_1K^{-\rho} + (1-A_1)(C-K)^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}-1} \times [A_1K^{-\rho-1} - (1-A_1)(C-K)^{-\rho-1}]. \end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, що $Q' = 0$ або $Q' = \infty$, коли один із співмножників вираження (12) дорівнює 0. Розглянемо обидва випадки:

$$\begin{aligned} &1.\quad A_1K^{-p} + (1-A_1)(C-K)^{-p} = 0. \\ &2.\quad A_1K^{-p-1} - (1-A_1)(C-K)^{-p-1} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Знайдемо рішення першого рівняння системи (13):

$$\left(\frac{K}{C-K}\right)^{-\rho} = -\frac{1-A_1}{A_1} \Rightarrow \frac{K}{C-K} = \left(-\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{14}$$

Оскільки $C - K = L$, то рівняння (14) приймає такий кінцевий вигляд:

$$\frac{K}{L} = \left(-\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{15}$$

Визначимо капітал $\boldsymbol{K}$ із співвідношення (15) і підставимо його в формулу (9) з метою визначення максимального випуску продукції $\boldsymbol{Q}$ у грошовому вираженні:

$$K = L\left(-\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}; \quad \max Q = A_0[A_1L^{-\rho}\left(-\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{-1} + (1-A_1)L^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}} =$$

$$= A_0[-(1-A_1)L^{-\rho} + (1-A_1)L^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}} = 0. \quad (16)$$

Оскільки у першому випадку $\boldsymbol{Q} = 0$ при будь-яких значеннях коефіцієнтів *CES*-функції, то фондоозброєність, що визначається формулою (15), не є точкою екстремуму.

Знайдемо рішення другого рівняння системи (13):

$$\left(\frac{K}{C-K}\right)^{-\rho-1} = \frac{1-A_1}{A_1} \Rightarrow \frac{K}{C-K} = \left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{\rho+1}}. \quad (17)$$

Звідси оптимальна фондоозброєність для другого випадку з урахуванням позначення (10) дорівнює:

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{\rho+1}} = \left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\sigma}. \quad (18)$$

Підставляючи вираження капіталу $\boldsymbol{K}$ із (18) у формулу (9) з метою визначення максимального випуску продукції $\boldsymbol{Q}$, у результаті елементарних перетворень отримаємо:

$$K = L\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{\rho+1}}; \quad \max Q = A_0[A_1L^{-\rho}\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{-\frac{\rho}{\rho+1}} + (1-A_1)L^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}} =$$

$$= A_0L^{\gamma}[A_1\left(\frac{1-A_1}{A_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho+1}} + 1 - A_1]^{-\frac{\gamma}{\rho}} = A_0L^{\gamma}[(1-A_1)^{\frac{\rho}{\rho+1}}A_1^{\frac{1}{\rho+1}} + 1 - A_1]^{-\frac{\gamma}{\rho}} =$$

$$= A_0L^{\gamma}(1-A_1)^{-\frac{\gamma}{\rho}}[\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{\rho+1}} + 1] = A_0L^{\gamma}(1-A_1)^{-\frac{\gamma}{\rho}}[\frac{K}{L} + 1]^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \quad (19)$$

Через те, що у другому випадку $\boldsymbol{Q} = 0$ лише при певних значеннях коефіцієнтів *CES*-функції ($\boldsymbol{A_0} = 0$; $\boldsymbol{A_1} = -1$), які не належать до області визначення коефіцієнтів ВФ (9), то фондоозброєність, що розраховується за формулою (18), може розглядатись як точка екстремуму даної ВФ.

Підставимо тепер вираження оптимальної фондоозброєності з вираження (18) у формулу, що визначає граничну норму заміщення ресурсів $\boldsymbol{h}$ для ПФ (9):

$$h = \frac{1-A_1}{A_1} \times \left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho} = \frac{1-A_1}{A_1} \times \left[\left(\frac{A_1}{1-A_1}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}\right]^{1+\rho} = 1. \quad (20)$$

Тобто для *CES*-функції ми отримали результат, аналогічний (8): в умовах оптимальної фондоозброєності (18), (19) величина граничної норми заміщення ресурсів для ВФ (9) теж дорівнює одиниці. Це означає, що обидві ВФ, які розглядаються, поводять себе в екстремальних ситуаціях тотожно.

Як відзначалося вище, особливий інтерес представляє собою використання побудованої функції (9) з метою прийняття управлінських рішень щодо додаткової інвестиції $\boldsymbol{C_1 = K_1 + L_1}$ у виробництво за умови її потенційної беззбитковості. Очевидно, якщо всі змінні *CES*-функції представлені в грошовому вираженні, то різниця $\boldsymbol{Q_1 - C_1 = p(C_1)}$ визначає величину прибутку, отриманого в результаті інвестування. У випадку, коли даний процес адекватно описується *CES*-функцією, величина $\boldsymbol{p(C_1)}$ дорівнює

$$p(C_1) = A_0[A_1K_1^{-\rho} + (1-A_1)L_1^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}} - C_1. \quad (21)$$

Ясно, що зона беззбитковості інвестування у виробництво додаткового капіталу $\boldsymbol{C_1}$ випливає з формули (21), коли $\boldsymbol{p(C_1)} \geq 0$. Відразу відзначимо, що величини $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{L_1}$ будемо визначати у відношенні оптимальної фондоозброєності (18), тобто за наступних умов:

$$K_1 = L_1\frac{A_1^{\sigma}}{(1-A_1)^{\sigma}}; \; L_1 = K_1\frac{(1-A_1)^{\sigma}}{A_1^{\sigma}}; \; K_1 + L_1 = C_1. \quad (22)$$

Виразимо величини $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{L_1}$ через $\boldsymbol{C_1}$:

$$K_1 = C_1\frac{A_1^{\sigma}}{A_1^{\sigma} + (1-A_1)^{\sigma}}; \; L_1 = C_1\frac{(1-A_1)^{\sigma}}{A_1^{\sigma} + (1-A_1)^{\sigma}}. \quad (23)$$

Позначимо

$$N = \frac{A_1^{\sigma}}{A_1^{\sigma} + (1-A_1)^{\sigma}}; \; M = \frac{(1-A_1)^{\sigma}}{A_1^{\sigma} + (1-A_1)^{\sigma}}. \quad (24)$$

Тоді з урахуванням (23) можна записати $\boldsymbol{K_1 = NC_1}$, $\boldsymbol{L_1 = MC_1}$, $\boldsymbol{N + M = 1}$. Очевидно, що для даного вираження виконуються всі умови (22). Підставимо отримані значення $\boldsymbol{K_1}$, $\boldsymbol{L_1}$ у формулу прибутку (21), який будемо вважати не негативним:

$$p(C_1) = A_0[A_1K_1^{-\rho} + (1-A_1)L_1^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}} - C_1 =$$

$$= A_0[A_1(NC_1)^{-\rho} + (1-A_1)(MC_1)^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{\rho}} - C_1 =$$

$$= A_0C_1^{\gamma}[A_1N^{-\rho} + (1-A_1)M^{-\rho}]^{-\frac{\gamma}{p}} - C_1 \geq 0. \quad (25)$$

Звідси випливає базова нерівність, виконання якої забезпечує беззбитковість додаткового інвестування у виробництво:

$$C_1^{\gamma-1} \geq \frac{[A_1 N^{-\rho} + (1-A_1)M^{-\rho}]^{\frac{\gamma}{\rho}}}{A_0}. \quad (26)$$

У залежності від значення показника ступеня однорідності *CES*-функції γ можливі три випадки:

1. $\gamma > 1$, тобто при позитивному ефекті розширення масштабів виробництва точка і зона беззбитковості на основі (26) визначаються нерівністю

$$C_1 \geq \left\{ \frac{[A_1 N^{-\rho} + (1-A_1)M^{-\rho}]^{\frac{\gamma}{\rho}}}{A_0} \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (27)$$

Це означає, що для забезпечення беззбиткового виробництва величина мінімальної інвестиції C_1 повинна задовольняти нерівність (27).

2. $\gamma < 1$, тобто при негативному ефекті розширення масштабів виробництва точка і зона беззбитковості за допомогою формули (26) визначаються нерівністю

$$C_1 \leq \left\{ \frac{A_0}{[A_1 N^{-\rho} + (1-A_1)M^{-\rho}]^{\frac{\gamma}{\rho}}} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (28)$$

Це означає, що для забезпечення беззбиткового виробництва величина максимальної інвестиції C_1 повинна задовольняти нерівність (28).

3. $\gamma = 1$ (при лінійній однорідності *CES*-функції) спостерігається нульовий ефект від розширення масштабів виробництва, тобто воно виявиться беззбитковим при будь-якій величині авансованого капіталу C_1. Однак беззбитковість у цьому випадку забезпечується певним співвідношенням коефіцієнтів побудованої ВФ. Згідно з базовою нерівністю (26) необхідно, щоб параметри *CES*-функції задовольняли наступну нерівність:

$$A_0 \geq [A_1 N^{-\rho} + (1-A_1)M^{-\rho}]^{\frac{1}{\rho}}. \quad (29)$$

Очевидно, що виконання нерівностей (27)-(29) прямо залежить від величини коефіцієнта шкали A_0. Малі значення даного параметра, отримані в економіко-математичному дослідженні, сигналізують про негативний стан економіки підприємства (галузі, регіону, країни), в першу чергу за рахунок недосконалості законодавства і податкової політики держави. Саме переважно фіскальний характер існуючої податкової політики держави по відношенню до малого і середнього бізнесу проявляється при розрахунках ВФ (9) у низьких значеннях параметра A_0.

Висновки і перспективи подальших досліджень у даному напрямі. Таким чином, формули (2), (18) дозволяють досліднику визначити точки оптимальної фондоозброєності, в яких випуск продукції досягає свого максимуму за умови, що виробництво суб'єктів господарювання підпорядковується відповідно ВФ Кобба-Дугласа або *CES*-функції. Формули (3), (19) надають можливість отримати достовірну оцінку шуканого максимуму.

Величина граничної норми заміщення ресурсів у цих точках для обох вказаних ВФ дорівнює одиниці. Натомість відхилення від значення $h = 1$ слід тлумачити як сигнал про порушення оптимальної фондоозброєності, тобто про певні диспропорції при інвестуванні коштів у агреговані виробничі фактори "капітал" і "праця".

Окрім того, традиційне застосування ВФ Кобба-Дугласа і *CES*-функції як ефективних засобів економічного аналізу витрат виробничих ресурсів суб'єктів господарювання може бути істотно поширене та поглиблене за рахунок використання нерівностей (5)-(7), (27)-(29), котрі відкривають перед дослідниками і практиками нові можливості в сфері прогнозування зон беззбитковості капітальних вкладень та управління інвестиційними проектами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Клейнер Г. Б. Производственные функции : теория, методы, применение / Г. Б. Клейнер. – М. : Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

2. Винн Р. Введение в прикладной эконометрический анализ / Р. Винн, К. Холден; [пер. с англ.]. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 294 с.

3. Казакова М. В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М. В. Казакова [Электронный ресурс]. – Режим доступа : ftp://ftp.repec.org/opt/ ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf.

4. Економетрія : навч. посіб. / [за ред. А. Ф. Кабака, О. В. Проценка]. – Одеса : НМЦО-ОДЕУ, 2003. – 562 с.

5. Янковий В. О. Прогнозування зони беззбитковості інвестицій у хлібопекарську промисловість за допомогою виробничої функції / В. О. Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса, 2006. – № 22. – С. 410-414.

6. Черевко Є. В. Оптимальна фондоозброєність та початковий капітал / Є. В. Черевко // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса, 2007. – № 26. – С. 359-365.

7. Янковий В. О. Модель беззбитковості інвестування в м'ясопереробну промисловість / В. О. Янковий // Економіка харчової промисловості. – 2010. – № 4 (8). – С. 16-21.

8. Янковий В. О. Гранична норма заміщення *CES*-функції в умовах оптимальної капіталоозброєності / В. О. Янковий / Матер. міжнар. науково-практичної конф. "Перспективи розвитку економічної системи в умовах нестабільності". – Дніпропетровськ, 4-5 вересня, 2015. – С. 56-59.

9. Янковий В. О. Умова одиничної граничної норми заміщення ресурсів для виробничої функції Кобба-Дугласа і *CES*-функції / В. О. Янковий / Матер. V межд. заочной научно-практической конф. "Развитие науки в XXI веке". – Харьков : Научно-информационный центр "Знание", 2015. – С. 48-52.

10. Kmenta J. (1967). On Estimation of the CES Production Function. International Economic Review. – 1967. – Vol. 8, No. 2, June. – P. 180-189.

11. Математическая экономика на персональном компьютере / М. Кубонива, М. Табата, С. Та-

бата, Ю. Хасэбэ; [под ред. М. Кубонива; пер. с япон.]. – М. : Финансы и статистика, 1991. – 304 с.

REFERENCES

1. Kleyner, G. B. (1986), *Proizvodstvennyie funktsii: teoriya, metodyi, primenenie* [Production functions: theory, methods, using], Finansyi i statistika Publ., Moscow, 239 p.

2. Vynn R. and Kholden K. (1981), *Vvedenye v prykladnoi ekonometrycheskyi analyz* [Introduction to the applied econometric analysis]. Finansyi i statistika Publ., Moscow, 294 p.

3. Kazakova, M. V. (2011), Analiz svoystv proizvodstvennyih funktsiy, ispolzuemyih pri dekompozitsii ekonomicheskogo rosta [Analysis of the properties of production functions used in the decomposition of economic growth], available at: ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf.

4. *Ekonometriya* [Econometrics] (2003), resp. edited A. F. Kabak, O. V. Protsenko, NMTSO-OSEU, Odesa, 562 p.

5. Iankovyi, V. O. (2006), Prognozuvannya zoni bezzbitkovosti investitsiy u hlibopekarsku promislovist za dopomogoyu virobnichoyi funktsiyi [Prediction of the breakeven investment zone in the baking industry by means of the production function], *Visnik sotsialnoekonomichnih doslidzhen*, 22, pp. 410-414.

6. Cherevko, E. V. (2007), Optimalna fondoozbroenist ta pochatkoviy capital [The optimal capital-labor ratio and initial capital], *Visnik sotsialno-ekonomichnih doslidzhen,* 26, pp. 359-365.

7. Iankovyi, V. O. (2010), Model bezzbytkovosti investuvannya v myasopererobnu promislovist [Model breakeven investment in processing industry], *Economica harchovoi promislovisti,* 4 (8), pp. 16-21.

8. Iankovyi, V. O. (2015), Granichna norma zamichennya CES-funkzii v umovah optiтalnoi capitaloozbroenosti [Marginal rate of substitution *CES*-function under optimal capital-labor], Materials Intern. Scientific-practical Conference “The prospects of the economic system in terms of instability”, Dnipropetrovsк, 4-5 September, pp. 56-59.

9. Iankovyi, V. O. (2015), Umova odinichnoi granichnji normy zamichennya resursiv dlya virobnschoi funkzii Cobba-Duglasa i CES-funkzii [Conditions of a single marginal rate of substitution of resources for production function Cobb-Douglas and *SES*-function], mater. V Intern. distains Scientific-practical Conference “The development of science in the XXI century”, Scientific Clearing Centre “Knowledge”, Kharkiv, pp. 48-52.

10. Kmenta J. (1967), On Estimation of the CES Production Function, *International Economic Review,* vol. 8, No. 2, June, p. 180-189.

11. *Matematycheskaia ekonomyka na personalnom kompiutere* [Mathematical economics on a personal computer] (1991), resp. edited M. Kubonyv, Finansyi i statistika Publ., Moscow, 304 p.